



Domeniul Ingineria Sistemelor

**TEZĂ DE DOCTORAT**  
– REZUMAT –

**Fixed Structure Robust Synthesis  
for Nonlinear Systems**

Sinteza Robustă de Structură Fixă  
pentru Sisteme Neliniare

**Student-doctorand:**  
**Ing. Vlad Mihai MIHALY**

**Conducător științific:**  
**Prof.Dr.Ing. Petru DOBRA**

**Comisia de evaluare a tezei de doctorat:**

Președinte: Prof.Dr.Ing. **Liviu-Cristian MICLEA** –  
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Conducător științific: Prof.Dr.Ing. **Petru DOBRA** –  
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

**Referenți:**

- Prof.Dr.Mat. **Radu Nicolae GOLOGAN** –  
Universitatea Politehnica București
- Prof.Dr.Ing. **Cristian OARĂ** –  
Universitatea Politehnica București
- Prof.Dr.Ing. **Radu-Emil PRECUP** –  
Universitatea Politehnica Timișoara

– Cluj-Napoca –  
**2024**

# Contents

1	Introducere . . . . .	2
2	Stadiul Actual al Cunoașterii în Domeniu . . . . .	3
3	Contribuții Personale . . . . .	4
4	Concluzii . . . . .	11

## 1 Introducere

Teza de față este una de cercetare fundamentală care își propune să extindă aparatul matematic pentru a rezolva problema sintezei robuste a reguletoarelor de structură fixă pentru sistemele neliniare. Punctul de plecare este lucrarea [1], care, pe baza unei serii de lucrări anterioare ale aceluiași autori, afirmă că problema sintezei  $\mathcal{H}_\infty$  este rezolvată în următoarele ipoteze: procesul este liniar și invariant în timp, iar coeficienții regulatorului sunt exprimați folosind doar operații aritmetice ale parametrilor ajustabili.

Pentru a proiecta o structură de control adecvată, mai multe subdomenii ale ingineriei de control trebuie luate în considerare. În primul rând, trebuie obținut un model matematic abstract al procesului. Acest pas este, în general, realizat prin modelarea fizică a procesului, identificarea sistemului sau o combinație a acestor două tehnici. După o analiză inițială a sistemului, se impune un set de performanțe pentru o structură de control adecvată. Sinteza controlerului este realizată astfel încât să se obțină specificațiile dorite. Dacă controlerul rezultat este de ordin mare, trebuie efectuat un pas suplimentar de reducere a ordinului cu o degradare minimă a performanțelor pentru a pregăti a doua parte a fluxului. Toți acești pași sunt, în general, efectuați în domeniul timpului continuu. A doua parte a fluxului este implementarea structurii de control obținute, care ar trebui să fie realizată pe un sistem numeric. Chiar dacă regulatorul în timp continuu este de structură fixă sau este o reprezentare de ordin redus a celui inițial, trebuie obținut un echivalent în timp discret. Cu toate acestea, având în vedere rata de eșantionare și metoda de discretizare, există o infinitate de reprezentări posibile ale unor astfel de reguletoare. Mai mult, având în vedere efectul de cuantizare aplicat coeficienților controlerului, semnalelor de intrare-ieșire și calculelor, trebuie efectuată o analiză riguroasă a degradării performanțelor.

În literatura de specialitate, toți pașii menționați anterior sunt tratați individual, luând în considerare diverse criterii pentru a realiza analiza degradării performanțelor. În plus, robustețea controlerelor de ordin fracționar este larg acceptată în literatură ca fiind implicită. Cu toate acestea, ca în cazul general al domeniului Analizei Matematice, majoritatea fenomenelor și rezultatelor par a fi evident adevărate, fără a avea o dovadă formală. Dar, în acele cazuri, rezultatele sunt adesea greșite, ideea de a da contraexemple în Analiza Matematică fiind o provocare continuă. Pornind de la această premisă, în această teză, consider o abordare unificată pentru a studia robustețea reguletoarelor de ordin fracționar, folosind o metrică unică pentru a analiza degradarea performanțelor la fiecare pas menționat în paragraful anterior.

Deoarece problema sintezei robuste de structură fixă este considerată rezolvată pentru sistemele liniare și invariante în timp, un pas natural este să analizăm aceeași problemă pentru sistemele neliniare. Chiar dacă problema este larg studiată în literatură, soluțiile disponibile sunt realizate pentru clase particulare de sisteme neliniare, cum ar fi cele biliniare, afine în raport cu intrarea, sau polinomiale. Există două abordări principale pentru rezolvarea acestei probleme: găsirea unui mecanism neliniar care poate fi adaptat pentru fiecare subproblemă în mod individual, sau găsirea unui mecanism intermediar care transformă un sistem neliniar

generic într-o structură specifică, cum ar fi liniare sau biliniare, pentru care deja există o soluție a problemei sintezei robuste de structură fixă sau pentru care ar putea fi dezvoltată o soluție. Teza prezintă mai multe încercări de a rezolva problema din perspectiva celei de-a doua abordări. O direcție majoră este posibilitatea dezvoltării de regulatoare de structură fixă bazate pe teoria pasivității pentru sistemele biliniare. O altă direcție majoră este de a cuprinde toate neliniaritățile reziduale care apar atunci când mecanismul de rezolvare a problemei de linearizare exactă prin reacție de la stare este utilizat pentru sistemele neliniare afine în raport cu intrarea având incertitudini aditive.

Teza are patru părți. **Partea I** prezintă contextul și motivația principală, împreună cu obiectivele și rezumatul tezei. **Partea a II-a** conține două capitole și ilustrează stadiul actual al cunoașterii în domeniu, oferind fundamentul matematic necesar pentru dezvoltarea rezultatelor principale ale tezei. **Partea a III-a** este partea centrală a tezei și conține trei capitole, fiecare fiind o unitate independentă, care include o scurtă prezentare a literaturii în domeniu, împreună cu limitările soluțiilor actuale și contribuțiile, o prezentare detaliată a principalelor rezultate teoretice, urmată de un set de studii de caz pentru a ilustra relevanța teoriei dezvoltate și o scurtă concluzie a capitolului. **Partea a IV-a** prezintă discuțiile finale, urmate de concluzii și direcții de cercetare ulterioare. În plus, teza prezintă lista de notații, abrevieri, tabele și figuri la începutul acesteia, în timp ce bibliografia și lista publicațiilor încheie teza.

**Partea I:** corespunde conținutului **Capitolului 1**, prezentând contextul științific, motivația, obiectivele specifice și o prezentare detaliată a structurii și a conținutului tezei.

## 2 Stadiul Actual al Cunoașterii în Domeniu

**Partea a II-a:** conține **Capitolele 2** și **3** ca fundament matematic al metodelor de control dezvoltate în această teză. **Capitolul 2** conține o prezentare cuprinzătoare a rezultatelor disponibile în literatură pentru realizarea unei sinteze a unui regulator robust pentru un sistem liniar și invariant în timp [2, 3]. Pentru sinteza robustă de structură fixă care minimizează norma  $\mathcal{H}_\infty$ , lucrarea [1] rezumă o serie de rezultate bazate pe tehnici de optimizare nenetedă. Pentru a extinde problema de control robust pentru sisteme incerte, se folosește valoarea singulară structurată ca măsură a robusteții [4]. Aceasta conduce la problema de sinteză  $\mu$ , care este NP-hard, fiind rezolvată utilizând bine-cunoscuta iterație  $D/G-K$  [4], pentru care există în prezent o abordare bazată pe optimizare nenetedă [5].

**Capitolul 3** prezintă principalele instrumente disponibile pentru analiza stabilității și a performanțelor sistemelor neliniare, împreună cu două metode de sinteză a reguletoarelor: una utilizând teoria pasivității și una utilizând linearizarea prin reacție de la stare. Capitolul începe cu o prezentare generală a principalelor concepte de stabilitate a sistemelor neliniare [6]. După ce sunt introduse diferitele tipuri de concepte de stabilitate, urmează o scurtă prezentare a rezultatelor din domeniul controlului bazat pe teoria pasivității [6]. Această expunere se concentrează în principal pe conceptul recent definit de pasivitate Krasovskii [7], pornind de la un set de condiții necesare și suficiente pentru a asigura pasivitatea Krasovskii pentru un sistem neliniar și continuând cu proiectarea reguletoarelor pasive Krasovskii pentru a asigura stabilitatea asimptotică. Capitolul se încheie cu o scurtă prezentare a principalelor rezultate din domeniul linearizării prin reacție de la stare pentru sistemele neliniare afine în raport cu intrarea, atât pentru sistemele cu o singură intrare și o singură ieșire, cât și pentru sistemele multivariabile [8].

### 3 Contribuții Personale

**Partea a III-a:** conține **Capitolele 4, 5 și 6** care cuprind principalele contribuții ale tezei. **Capitolul 4** prezintă mecanismul care permite introducerea elementului de ordin fracționar în cadrul generalizat de Control Robust de ordin întreg, utilizând instrumentele matematice subliniate în **Capitolul 2**. **Capitolele 5 și 6** tratează posibilitatea de a rezolva sinteza robustă de structură fixă pentru sistemele neliniare utilizând pasivitatea Krasovskii și, respectiv, linearizarea prin reacție de la stare, extinzând noțiunile prezentate în **Capitolul 3**.

**Capitolul 4** se concentrează pe introducerea elementului de ordin fracționar în cadrul generalizat de Control Robust de ordin întreg. O reprezentare de ordin finit este necesară pentru a implementa un astfel de regulator, care este de ordin infinit. Familia propusă de reguloare de ordin fracționar  $\mathcal{K}$  de  $n_y \times n_u$  reguloare de ordin fracționar poate fi scrisă astfel:

$$\mathcal{K} = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} H_{\mathbf{a}^{(1,1)}, \alpha^{(1,1)}}^{\mathbf{b}^{(1,1)}, \beta^{(1,1)}}(s) & \cdots & H_{\mathbf{a}^{(1, n_u)}, \alpha^{(1, n_u)}}^{\mathbf{b}^{(1, n_u)}, \beta^{(1, n_u)}}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{\mathbf{a}^{(n_y, 1)}, \alpha^{(n_y, 1)}}^{\mathbf{b}^{(n_y, 1)}, \beta^{(n_y, 1)}}(s) & \cdots & H_{\mathbf{a}^{(n_y, n_u)}, \alpha^{(n_y, n_u)}}^{\mathbf{b}^{(n_y, n_u)}, \beta^{(n_y, n_u)}}(s) \end{array} \right\}, \text{ unde } H_{\mathbf{a}, \alpha}^{\mathbf{b}, \beta}(s) = \frac{\sum_{(b_i, \beta_i) \in \mathbf{b} \times \beta} b_i s^{\beta_i}}{\sum_{(a_i, \alpha_i) \in \mathbf{a} \times \alpha} a_i s^{\alpha_i}}, \quad (1)$$

parametrii acordabili fiind  $\alpha^\top = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a}^\top = (a_1 a_2 \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta^\top = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m) \in \mathbb{R}^m$  și  $\mathbf{b}^\top = (b_1 b_2 \dots b_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Elementul de ordin fracționar este introdus în sinteza robustă de structură fixă folosind aproximarea Oustaloup recursivă (engl. *Oustaloup Recursive Approximation* și aproximarea Oustaloup (engl. *Oustaloup Approximation*), luând în considerare o reprezentare izomorfă adecvată, așa cum este subliniat în Algoritmul **3** și Algoritmul **4**. În plus, diferența dintre elementul de ordin fracționar și aproximarea sa de ordin întreg este modelată folosind o incertitudine aditivă, prezentând un bloc de incertitudine  $\Delta_K$ , așa cum este ilustrat în Figura 1. Prin urmare, problema de sinteză  $\mu$  cu structură fixă trebuie convertită în următoarea formă:

$$\inf_{\bar{K} \in \tilde{\mathcal{K}}_{IO}} \mu_{\text{diag}(\Delta, \Delta_K)} (\text{LLFT}(P, \bar{K})), \quad (2)$$

unde  $\bar{K}$  este aproximarea regulatorului cu o conexiune LLFT adițională cu blocul de incertitudine  $\Delta_K$ , marcată cu linie întreruptă în Figura 1, în timp ce  $\tilde{\mathcal{K}}_{IO}$  este aproximarea de ordin întreg a familiei de controlere de ordin fracționar  $\mathcal{K}$ . Aceeași metodă ar trebui să fie utilizată pentru a rezolva această versiune modificată a problemei de sinteză  $\mu$  de structură fixă, avantajul principal fiind că regulatorul de ordin fracționar asigură în sine stabilitatea robustă și performanța robustă.

După cum s-a menționat în studiul bibliografic, există mai multe tehnici pentru proiectarea reguletoarelor robuste de ordin fracționar. Cu toate acestea, din cercetările mele, teza prezintă prima metodologie pentru proiectarea unui regulator robust de ordin fracționar care garantează simultan robustețea aproximării sale de ordin întreg. Un dezavantaj posibil al metodei este conservatismul modelului de incertitudine care cuprinde diferența dintre elementul de ordin fracționar și aproximarea sa de ordin întreg. Acest dezavantaj poate fi limitat dacă aproximarea de ordin întreg este de ordin mare. Dar, în faza de proiectare, avantajul de a nu fi limitat la pante fixe de  $\pm 20$ [dB/dec] pentru procedura de sculptare a buclei (engl. *loop shaping*) oferă un instrument mai precis și permite impunerea unei performanțe mai bune cu mai puțini parametri de proiectare.

O altă contribuție a capitolului constă în tehnicile de reducere a ordinului care mențin robustețea folosind aceeași metrică precum în faza de proiectare. Astfel, pentru o aproximare

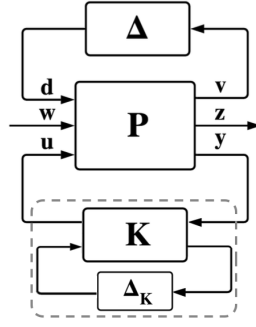


Figura 1: Procesul generalizat  $P$  cu o conexiune ULFT cu blocul de incertitudine  $\Delta$  și o conexiune LLFT cu controlerul  $\bar{K}$ , care constă într-o conexiune LLFT între controlerul  $K$  și blocul de incertitudine  $\Delta_K$  derivat din aproximarea fiecărui element de ordin fracționar al controlerului  $K$ .

de ordin întreg  $\bar{K} \in \tilde{\mathcal{K}}_{IO}$ , aceeași cantitate ar trebui minimizată în ambele cazuri:

$$\overline{\text{ord}(K)} \equiv \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{\alpha_k \in \alpha^{(i,j)}} N_{\alpha_k} + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{\beta_k \in \beta^{(i,j)}} N_{\beta_k}, \quad (3)$$

problema de optimizare care ar rezulta fiind:

$$\begin{aligned} \min \quad & \overline{\text{ord}(K)} \\ \text{a.î.} \quad & \mu_{\Delta}(\text{LLFT}(P, \bar{K})) < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Această problemă poate fi văzută ca o sortare topologică pe un graf orientat și aciclic  $G_{\mathbb{L}} = (V, E)$ , unde  $V$  sunt nodurile grafului și  $E$  sunt muchiile grafului. Mulțimea  $V$  corespunde nodurilor rețelei  $\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, N_0\}^{m+n} \subset \mathbb{Z}^{m+n}$ , unde  $N_0$  este ordinul inițial de aproximare al fiecărui element de ordin fracționar din  $K \in \mathcal{K}$ . Muchiile orientate  $E$  sunt considerate astfel:  $e_{ij}$  este considerată între două noduri  $v_i$  și  $v_j$  dacă exact o coordonată a rețelei variază cu 1, în timp ce restul rămân aceleași, iar ambele noduri produc o aproximare care asigură robustețea.

**Lema 1** *Soluția optimă a problemei (4) corespunde celui mai lung lanț al grafului orientat aciclic  $G_{\mathbb{L}} = (V, E)$ .*

Al doilea pas de reducere a ordinului se bazează pe valorile singulare Hankel. După cum este demonstrat în cel de-al doilea exemplu numeric, fiecare pas de reducere a ordinului trebuie efectuat, deoarece pașii individuali nu sunt capabili să reducă suficient reprezentarea de ordin întreg a controlerului de ordin fracționar. În plus, mecanismul suplimentar de obținere a unei mai bune aproximări frecvențiale este necesar, deoarece fiecare pas cauzează o degradare, în special în ceea ce privește faza. Pe baza unei funcționale de similaritate, se obține o problemă de optimizare:

$$\begin{aligned} \min_{K_{\text{approx}}} \quad & \sum_{\omega \in \Omega} \|K(j\omega) - K_{\text{approx}}(j\omega)\|^2 \cdot \Delta\omega \\ \text{a.î.} \quad & \mu_{\Delta}(\text{LLFT}(P, K_{\text{approx}})) < 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Acest mecanism beneficiază și de faptul că are simultan un regulator de ordin fracționar și o aproximare a acestuia cu garanții matematice de robustețe, astfel pașii efectuați de algoritmul de optimizare pot fi numai în regiunea fezabilă.

Aceste probleme de reducere a ordinului, împreună cu problema alegerii ratei de eșantionare și a pasului uniform de cuantizare, rezolvă problema de implementare numerică a unui regulator

de ordin fracționar. Astfel, controlerul numeric  $\tilde{K}(z)$  este obținut prin eșantionare cu un interval constant  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , urmat de un pas de discretizare și folosind o cuantizare uniformă  $q \in \mathbb{R}_+$  a coeficienților săi:

$$\tilde{K}_q = \mathcal{Q} \{ \mathcal{D} \{ \bar{K}, \tau \}, q \} = \mathcal{Q} \{ \tilde{K}, q \}, \quad (6)$$

în timp ce varianta în timp discret a valorii singulare structurate este:

$$\mu_{\Delta}(\text{LLFT}(\tilde{P}, \tilde{K}_q)) = \sup_{\omega \in \Omega_N} \frac{1}{\min_{\Delta \in \Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta), \det(I - \text{LLFT}(\tilde{P}, \tilde{K}_q)(e^{j\omega\tau})\Delta) = 0 \}} < 1.$$

Toate etapele de implementare numerică sunt efectuate păstrând robustețea pe tot parcursul fluxului prezentat, cu o degradare minimă a performanțelor atât în regim tranzitoriu, cât și în regim staționar. Astfel, se poate formula următoarea problemă de optimizare neconvexă.

**Problema 1** Pornind de la un regulator în timp continuu  $K$  presupus să asigure stabilitate robustă și performanțele robuste, problema de implementare care produce un regulator în timp discret  $\tilde{K}_q \stackrel{D_\xi}{\approx} \mathcal{Q} \{ \mathcal{D} \{ K, \tau \}, q \}$ , având pașii de cuantizare ai semnalelor  $\delta_e, \delta_x, \delta_u > 0$ , cu performanțele minim degradate în regim tranzitoriu și eroare minimă de urmărire datorită efectelor de cuantizare, poate fi obținută ca soluție a problemei de minimizare condiționată:

$$\begin{aligned} \min_{(\tau, q) \in \mathbb{R}^2} \min_{(\xi, \alpha) \in \mathbb{R}_+^{n_c} \times \mathbb{R}_+^{n_\ell}} \mathcal{J}(\xi, \alpha) &= \varepsilon_G \left( \tilde{K}_q, \left( \bar{D}_\xi^2 D_\alpha \right) S_0, \bar{D}_\xi F \right) \\ \text{a.î.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\| \left( D_\xi^{-1} \tilde{A}_1 D_\xi, D_\xi^{-1} \tilde{B}_1, I, O \right) \right\|_\infty < \bar{N}_{x_c} \\ \mu_{\Delta} \left( \text{LLFT} \left( \tilde{P}, \tilde{K}_q \right) \right) < 1. \end{array} \right. & \quad (7) \end{aligned}$$

De asemenea, ultima secțiune teoretică a acestui capitol demonstrează că metodologia propusă funcționează și pentru procese de ordin fracționar cu coeficienți variabili într-un interval (engl. *fractional-order interval plants*), fără nicio presupunere referitoare la existența unui ordin comensurabil. Eliminarea acestei presupuneri dovedește generalitatea și versatilitatea metodei propuse și reușește să extindă problema rezolvată în [1].

**Capitolul 5** își propune să prezinte pasivitatea Krasovskii ca un instrument intermediar pentru extinderea sintezei robuste pentru sistemele neliniare. Prima contribuție majoră este o modalitate convexă de a prezenta problema studierii pasivității Krasovskii a sistemelor neliniare cu intrări afine. Condițiile din prezentate în Lema 1 din **Capitolul 2** au fost reformulate într-un set finit de inegalități liniare matriceale pentru două cazuri particulare: cazul bilinar și cazul politopic. Astfel, pentru un sistem neliniar cu intrări afine:

$$(\Sigma) : \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv g_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n_u} g_i(\mathbf{x}) u_i, \quad (8)$$

cu un domeniu de intrare compact  $\mathcal{D}_u = [u_1, \bar{u}_1] \times \dots \times [u_{n_u}, \bar{u}_{n_u}]$ , dacă Jacobienii sunt constanți pe domeniul fezabil al stărilor  $\mathcal{D}_x$ , i.e. sistemul este bilinar cu  $\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}} = A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $i = \overline{0, n_u}$ , un set de condiții necesare și suficiente pentru pasivitatea Krasovskii este:

**Teorema 1** Sistemul bilinar  $(\Sigma)$  având domeniul intrărilor compact este Krasovskii pasiv în raport cu rata de alimentare  $\omega_K(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_d) = \mathbf{u}_d^\top h_K(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , unde funcția de ieșire este  $h_K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [g_1(\mathbf{x})^\top \dots g_{n_u}(\mathbf{x})^\top] \cdot Q \cdot \dot{\mathbf{x}}$ , și cu funcția de stocare  $S_K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \|\dot{\mathbf{x}}\|_Q^2$  dacă și numai dacă există o matrice simetrică și pozitiv-semidefinită  $Q \in \mathbb{S}_{n_x}^{\geq 0}$  care satisface următoarele condiții:

$$Q A_0 + A_0^\top Q + \sum_{i=1}^{n_u} \left( (Q A_i + A_i^\top Q) e_i u_i + (Q A_i + A_i^\top Q) (1 - e_i) \bar{u}_i \right) \leq 0, \quad (9)$$

pentru fiecare cuvânt binar  $\mathbf{e} = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{n_u})^\top \in \mathbb{Z}_2^{n_u}$ .

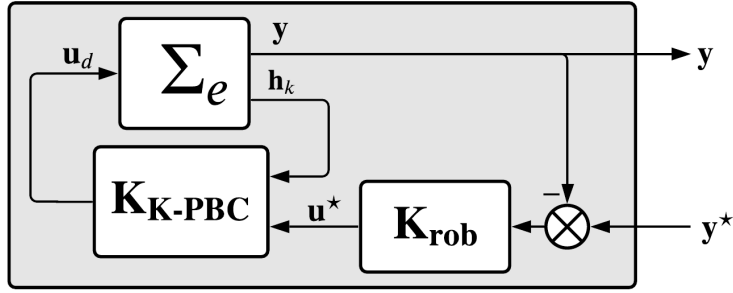


Figura 2: Structura de control în buclă închisă conține în bucla internă un control bazat pe pasivitatea Krasovskii care asigură stabilitatea asimptotică și în bucla externă un regulator robust pentru a oferi un planificator dinamic al traiectoriei pentru impunerea performanțelor.

Pentru cazul sistemelor cu aproximare politopică, i.e.  $\frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}} \in \text{Co} \left( \mathcal{A}^{(j)} \equiv \left\{ A_i^{(j)}, i = \overline{1, n_{A^{(j)}}} \right\} \right)$ , următorul set de condiții suficiente pentru a garanta pasivitatea Krasovskii se poate formula.

**Teorema 2** *Sistemul  $(\Sigma)$  cu aproximare politopică având domeniul intrărilor compact este Krasovskii pasiv în raport cu rata de alimentare  $\omega_K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}_d^\top h_K(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , având funcția de ieșire  $h_K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [g_1(\mathbf{x})^\top \dots g_{n_u}(\mathbf{x})^\top] \cdot Q \cdot \dot{\mathbf{x}}$ , și funcția de stocare  $S_K(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|_Q^2$ , dacă există o matrice simetrică și pozitiv definită  $Q \in \mathbb{S}_{n_x}^{\geq 0}$  care verifică simultan următoarele condiții:*

$$Q\mathcal{A}_{\lambda^{(0)}}^{(0)} + \left( \mathcal{A}_{\lambda^{(0)}}^{(0)} \right)^\top Q + \sum_{i=1}^{n_u} \left( Q\mathcal{A}_{\lambda^{(i)}}^{(i)} + \left( \mathcal{A}_{\lambda^{(i)}}^{(i)} \right)^\top Q \right) (e_i \underline{u}_i + (1 - e_i) \bar{u}_i) \leq 0, \quad (10)$$

pentru fiecare cuvânt binar  $\mathbf{e} = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{n_u})^\top \in \mathbb{Z}_2^{n_u}$  și pentru fiecare cuvânt singular binar  $\lambda^{(i)} \in \mathbb{Z}_2^{n_{A^{(i)}}}$ .

Conservatorismul condițiilor din cazul mai general depinde de calitatea aproximării politopice a Jacobienilor funcțiilor de intrare și de stare.

O altă contribuție majoră a acestui capitol este propunerea unui set de mecanisme non-convexe și convexe pentru a impune (și pentru a minimiza în continuare) timpul tranzitoriu al unui sistem bilinar pasiv Krasovskii folosind regulatoare bazate pe pasivitatea Krasovskii de ordinul întâi și al doilea. Structura propusă a buclei închise este ilustrată în Figura 2 și conține un regulator Krasovskii interior, care asigură stabilitatea asimptotică a sistemului nelinier, alături de o componentă robustă exterioară pentru a impune un set de performanțe.

Acest capitol oferă, de asemenea, un cadru unificat pentru modelarea convertoarelor de curent continuu cu neidealitățile asociate componentelor, i.e. rezistențe parazite sau căderi de tensiune asociate, ca o clasă relevantă de sisteme bilineare. Pentru mai multe topologii particulare, pasivitatea Krasovskii a fost studiată, împreună cu posibilitatea proiectării unui regulator Krasovskii pasiv cu structură fixă și a unei componente robuste, realizând o sinteză robustă neliniară.

Pentru a ilustra relevanța metodelor propuse, același exemplu numeric a fost utilizat ca în lucrarea originală [7]. Chiar dacă pasivitatea Krasovskii împreună cu condiția de detectabilitate în origine (engl. *zero detectability*) asigură stabilitatea asimptotică, nu există estimări disponibile ale timpului de tranziție. Așa cum este ilustrat în Figura 3, o calibrare nepotrivită a parametrilor unui regulator pasiv Krasovskii de ordinul întâi conduce la o valoare mare a duratei regimului tranzitoriu.

Dacă parametrii optimi ai regulatorului sunt considerați, se poate observa în Figura 4 un timp de tranziție consistent indiferent de valoarea punctului inițial din domeniul stărilor. În

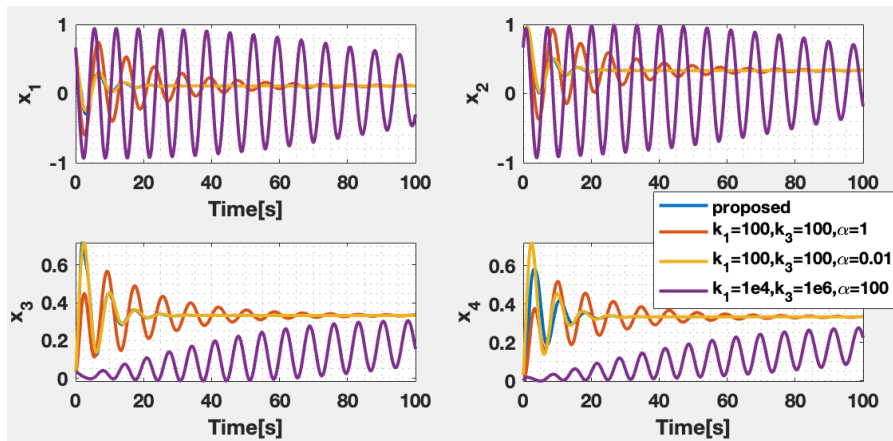


Figura 3: Evoluția traiectoriilor de stare ale sistemului în buclă închisă, luând în considerare un regulator inițial dat (posibil bine calibrat), împreună cu alte trei variațiuni ale parametrilor acestuia care asigură stabilitatea asimptotică, dar având o durată mare a regimului tranzitoriu.

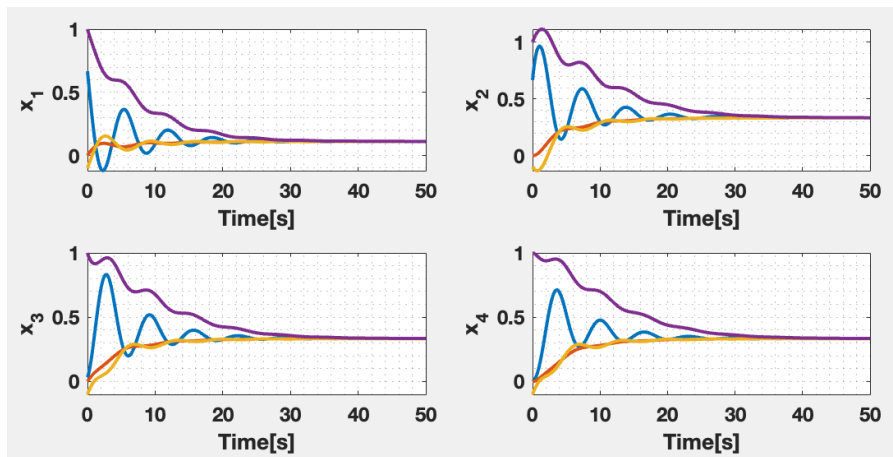


Figura 4: Traiectoriile de stare ale sistemului în buclă închisă obținute utilizând un regulator Krasovskii pasiv de ordinul întâi optimizat și considerând condiții inițiale arbitrare.

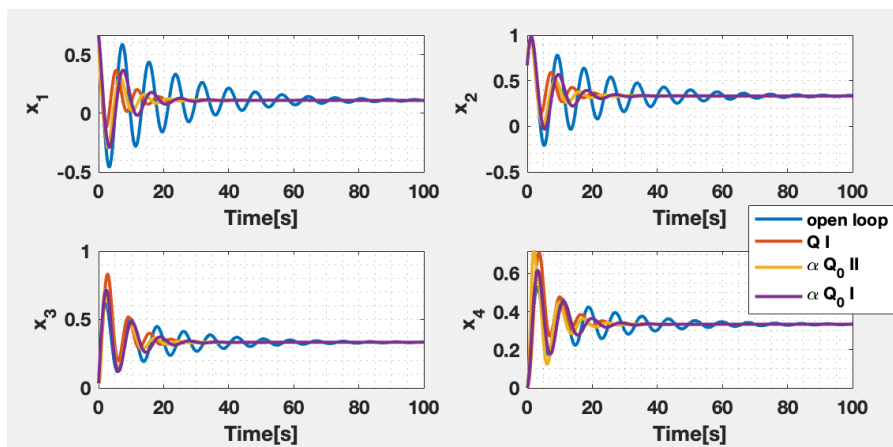


Figura 5: Comparație între evoluțiile traiectoriilor de stare ale sistemului în buclă deschisă (albastru) și traiectoriile de stare ale sistemului în buclă închisă obținute cu un regulator Krasovskii pasiv de ordinul întâi cu  $Q$  optimizat (roșu), și regulatoare Krasovskii de ordinul întâi (mov) și de ordinul doi (galben) cu  $Q$  fixat.

plus, o comparație între sistemul în buclă deschisă și sistemele în buclă închisă obținute cu regulatoarele Krasovskii de ordinul întâi și al doilea este realizată în Figura 5.

**Capitolul 6** extinde instrumentele matematice disponibile pentru problema de linearizare *exactă* cu reacție de la stare la cazul de linearizare *robustă* cu reacție de la stare. Așa cum este menționat în studiul bibliografic, soluțiile disponibile în literatură consideră o structură de control cu trei bucle, având o componentă robustă în bucla externă proiectată pentru modelul liniar cu incertitudini care înglobează comportamentul sistemului neliniar incert afin în raport cu intrarea. Majoritatea rezultatelor prezentate în acest capitol sunt pentru sisteme neliniare cu incertitudini și afine în raport cu intrarea, având o singură intrare și o singură ieșire, cu incertitudini aditive atât pe funcțiile de intrare, cât și pe funcțiile de stare:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) + (g(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x})) u; \\ y = h(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (11)$$

unde incertitudinile aditive  $\Delta f, \Delta g : \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sunt funcții netede pe domeniul de definiție. Există trei clase posibile de incertitudini: (i) incertitudini complet potrivite (engl. *fully-matched*)  $\Delta f, \Delta g \in \text{Span}\{g\}$ ; (ii) incertitudini parțial potrivite (engl. *partially-matched*)  $\Delta g \in \text{Span}\{g\}$  și  $\Delta f \notin \text{Span}\{g\}$ ; (iii) incertitudini nepotrivite (engl. *unmatched*)  $\Delta f, \Delta g \notin \text{Span}\{g\}$ . Una dintre principalele contribuții ale acestui capitol este caracterizarea neliniarităților reziduale obținute după aplicarea unui semnal de intrare adecvat pentru a anula neliniaritatea sistemului nominal după aplicarea difeomorfismului de liniarizare. Pentru cazul general, reprezentarea în spațiul stărilor a sistemului  $(\Sigma)$  în noile coordonate  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$  este:

$$(\Sigma_z) : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + L_{\Delta f} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\Delta g} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) u; \\ \dot{z}_2 = z_3 + L_{\Delta f} L_f h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\Delta g} L_f h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) u; \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n + L_{\Delta f} L_f^{n-2} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\Delta g} L_f^{n-2} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) u; \\ \dot{z}_n = L_f^n h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\Delta f} L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) + L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) u + L_{\Delta g} L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) u; \\ y = z_1. \end{cases} \quad (12)$$

Considerând comanda de linearizare cu reacție de la stare a sistemului nominal:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))} (v - L_f^n h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))), \quad (13)$$

obținem următoarea reprezentare a buclei interne de control  $(\Sigma_{z,\text{in}})$  :

$$(\Sigma_{z,\text{in}}) : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + Bv + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z})v; \\ y = C\mathbf{z}, \end{cases} \quad (14)$$

unde  $(A, B, C)$  reprezintă un lanț de  $n$  integratoare, în timp ce  $\tilde{\mathbf{f}}$  și  $\tilde{\mathbf{g}}$  conțin  $n$  funcții fiecare, având forma:

$$\tilde{f}_k(\mathbf{z}) = L_{\Delta f} L_f^{k-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) - \frac{L_{\Delta g} L_f^{k-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}{L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))} L_f^n h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})), \quad k = \overline{1, n}, \quad (15)$$

și:

$$\tilde{g}_k(\mathbf{z}) = \frac{L_{\Delta g} L_f^{k-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}{L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z}))}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (16)$$

În cazul general în care incertitudinile sunt nepotrivite, folosim următoarele ipoteze de lucru:

- neliniaritatea reziduală corespunzătoare stărilor  $\tilde{\mathbf{f}}$  are gradientul inclus în înfășurătoarea convexă a matricelor  $A_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ :

$$\nabla \tilde{\mathbf{f}} \in \text{Co} \{A_j, j = \overline{1, m}\}; \quad (17)$$

- neliniaritatea reziduală corespunzătoare intrărilor  $\tilde{\mathbf{g}}$  este mărginită element cu element:

$$\underline{\tilde{g}}_k \leq \tilde{g}_k(\mathbf{z}) \leq \bar{\tilde{g}}_k, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}}. \quad (18)$$

Așa cum s-a demonstrat în Teoremele 12, 14 și 15 din **Capitolul 6**, în cazul în care avem un grad relativ uniform complet, aceste neliniarități reziduale pot fi încadrate de o incertitudine modelată ca un sistem impropriu. Pentru cazul general, teorema are următoarea formulare:

**Teorema 3** *Incetitudinea care cuprinde neliniaritățile reziduale  $\tilde{\mathbf{f}}$  și  $\tilde{\mathbf{g}}$  din  $(\Sigma_{z,in})$  în ipoteza generală, considerând o incertitudine aditivă inversă, este modelată folosind un sistem impropriu având excesul zerourilor față de poli egal cu ordinul sistemului.*

Deoarece excesul de zerouri este egal cu ordinul sistemului, sistemul linear cu incertitudini obținut este propriu, ceea ce permite efectuarea sintezei robuste de structură fixă. Echivalența dintre sistemul linear incert și sistemul în buclă închisă  $(\Sigma_{z,in})$  este ilustrată în Figura 6.

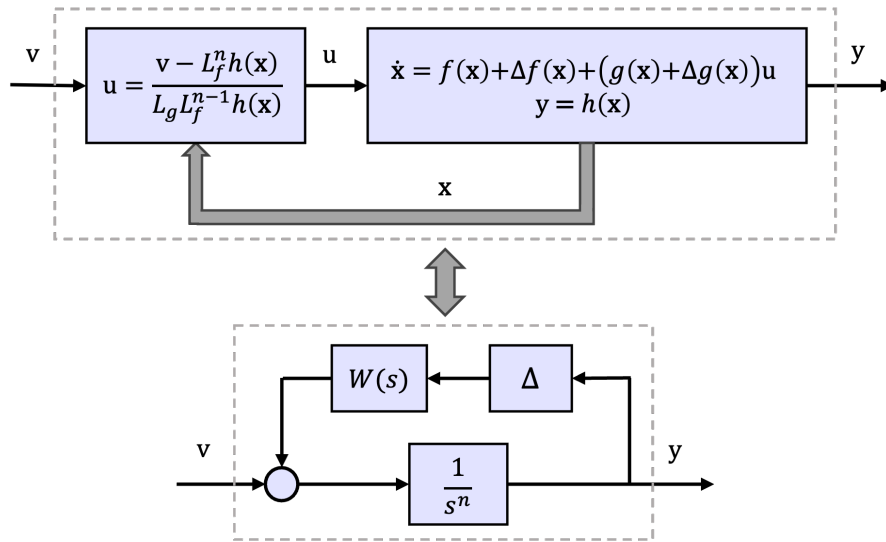


Figura 6: Echivalența dintre sistemul în buclă închisă  $(\Sigma_{z,in})$  și sistemul linear cu incertitudini  $G_{\Delta}(s)$ .

Pentru cazurile particulare ale incertitudinilor parțial și complet potrivite, modelul incertitudinii  $W(s)$  poate fi caracterizat într-un mod mai puțin conservator. După cum este dovedit în Teorema 13 din **Capitolul 6**, aceste două tipuri de incertitudini păstrează gradul relativ complet al sistemului nominal. În plus, pentru cazul particular în care gradul relativ uniform este mai mic decât ordinul sistemului, sunt de asemenea caracterizate neliniaritățile reziduale. Astfel, problema liniarizării robuste cu reacție de la stare a sistemelor neliniare afine în raport cu intrarea cu o singură intrare și o singură ieșire poate fi rezolvată prin adăugarea unui singur regulator robust peste intrarea de liniarizare a sistemului nominal.

O altă contribuție majoră constă în a oferi un mecanism pentru a determina un model de incertitudine impropriu pe baza măsurătorilor de frecvență. Mai întâi, problema neconvexă a fost rezolvată folosind mecanismele disponibile. Apoi, este prezentată o procedură de convexificare prin extinderea mecanismului din rutina `fitmagfrd` disponibilă în MATLAB<sup>®</sup>. Un posibil dezavantaj al metodei este conservatorismul impus de înfășurătoarea convexă din care

derivă modelul cu incertitudini. Cu toate acestea, această problemă este abordată prin considerarea cazurilor particulare de incertitudini complet și parțial potrivite. În plus, demonstrațiile teoremelor menționate mai sus oferă un model pentru funcția de ponderare a incertitudinii menționate.

Pentru cazul sistemelor multivariabile, în acest capitol sunt disponibile câteva rezultate incipiente. Cazul particular al roboților seriali prezintă un grad relativ vectorial uniform. Pentru astfel de sisteme neliniare cu incertitudini, mecanismul ar putea fi extins ușor. Cu toate acestea, problema de modelare a incertitudinii este încă deschisă pentru cazul multivariabil dacă modelul este un sistem cu descriptori.

## 4 Concluzii

**Partea a IV-a:** conține **Capitolul 7**, care prezintă o serie de discuții finale, împreună cu concluziile tezei și un set de direcții de dezvoltare ulterioare.

De-a lungul tezei au fost enunțate și demonstrate o serie de teoreme, leme și corolari, urmate de un set de probleme de optimizare propuse. Un posibil dezavantaj este natura neconvexă a acestor probleme de optimizare. Cu toate acestea, metodele de optimizare neconvexe sunt instrumente puternice pentru rezolvarea problemelor de optimizare complexe în care funcția obiectiv sau constrângerile sunt neconvexe. Chiar dacă metodele de optimizare convexe au garanții bine stabilite de convergență, metodele de optimizare neconvexe oferă flexibilitatea de a gestiona o gamă mai largă de probleme, inclusiv cele cu funcții obiectiv sau constrângeri nenetede sau neconvexe. Principalele probleme ale acestor metode de optimizare neconvexe sunt convergența către optime locale, complexitatea computațională mai mare și lipsa garanțiilor teoretice. În ansamblu, metodele de optimizare neconvexe sunt instrumente valoroase care completează tehnicile de optimizare convexe și joacă un rol semnificativ în abordarea problemelor orientate spre control.

Toate rezultatele teoretice dezvoltate în această teză sunt expuse într-un mod *end-to-end* pe studii de caz numerice relevante. În acest context, teza prezintă o altă contribuție în ceea ce privește tratamentul unitar al convertoarelor de curent continuu ca sisteme biliniare. Studiile de caz incluse în teză sunt preluate și adaptate din publicațiile autorului și subliniază evoluția rezultatelor teoretice obținute în timpul studiilor de doctorat. Chiar dacă majoritatea acestor studii de caz sunt simulări numerice efectuate în MATLAB<sup>®</sup>/Simulink, au fost luate în considerare probleme de referință relevante în control.

Ca direcții de cercetare ulterioare, există două probleme principale expuse în continuare care ar putea fi luate în considerare pentru a rezolva problema sintezei reguletoarelor robuste cu structură fixă pentru sistemele neliniare.

**Problema 2** Fie  $\Sigma$  un sistem neliniar finit dimensional cu incertitudini și  $\bar{\mathcal{A}}$  un operator de augmentare neliniar, care impune un set de performanțe, conducând la formarea sistemului neliniar augmentat cu incertitudini  $\Sigma_{aug} = \bar{\mathcal{A}}(\Sigma)$ . Fie, de asemenea, CL operatorul în buclă închisă între sistemul  $\Sigma_{aug}$  și regulatorul cu structură fixă  $\Sigma_K \in \mathcal{K}_\Sigma$ , unde  $\mathcal{K}_\Sigma$  este echivalentul lui  $\mathcal{K}$  pentru familia dorită de reguletoare neliniare cu structură fixă. Dacă semi-metrica  $\|\cdot\|_\Sigma$  este echivalentul valorii singulare structurate  $\mu_\Delta(\cdot)$ , atunci problema de sinteză a reguletoarelor robuste cu structură fixă pentru sisteme neliniare este următoarea problemă de optimizare:

$$\inf_{\Sigma_K \in \mathcal{K}_\Sigma} \|\text{CL}(\Sigma_{aug}, \Sigma_K)\|_\Sigma. \quad (19)$$

**Problema 3** Fie  $\Sigma$  un sistem neliniar finit dimensional cu incertitudini, cu realizarea nominală  $\Sigma_n$ . De asemenea, fie  $\mathcal{L}$  un operator de liniarizare care transformă  $\Sigma$  într-un sistem liniar cu incertitudini  $G_\Delta(s) = \mathcal{L}(\Sigma) = \text{ULFT}(G_n(s), W(s)\Delta)$ , unde  $G_n(s) = \mathcal{L}(\Sigma_n)$  este

reprezentarea liniară a sistemului nominal,  $W(s)$  este modelul de incertitudine și  $\|\Delta\| \leq 1$  este un sistem arbitrar. Operatorul de augmentare  $\mathcal{A}$  conduce la formarea sistemului augmentat cu incertitudini  $G_{aug,\Delta}(s) = \mathcal{A}(G_\Delta(s), W_s(s))$ , unde  $W_s(s)$  conține filtrele de ponderare folosite pentru a impune performanțele dorite. Atunci controlerul cu structură fixă  $K \in \mathcal{K}$  care asigură stabilitatea și performanțele robuste este soluția problemei de optimizare:

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} \mu_\Delta(G_{aug,\Delta}, K) < 1. \quad (20)$$

Problema 2 prezintă un set de entități matematice care ar trebui să fie definite în continuare pentru a formula clar problema de optimizare, având în vedere instrumentele de optimizare disponibile. Pe de altă parte, Problema 3 necesită doar o reprezentare cât mai puțin conservativă a unui sistem neliniar în cadrul controlului liniar. Chiar dacă procedura de liniarizare bazată pe operatorul Koopman poate fi utilizată ca operatorul de liniarizare  $\mathcal{L}$ , dimensionalitatea sa infinită reprezintă încă o problemă deschisă pentru sinteza robustă de structură fixă în contextul liniar.

## Referințe Bibliografice

- [1] P. Apkarian, D. Noll, The  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problem is Solved, *Design and Validation of Aerospace Control Systems*, Aerospace Lab, Alain Appriou, pp. 1–11, 2017.
- [2] S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and design*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2005.
- [3] K.Z. Liu, Y. Yao, *Robust Control—Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Singapore, 2016.
- [4] A. Packard, J. Doyle, G. Balas, Linear Multivariable Robust Control with a  $\mu$  Perspective. *J. Dyn. Syst. Meas. Ctrl.*, 115, pp. 426–438, 1993.
- [5] P. Apkarian, Nonsmooth  $\mu$  synthesis. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 1493–1508, 2011.
- [6] H.K. Khalil, *Nonlinear Control*, Global Edition, 1st Edition, Pearson Education Ltd., 2015.
- [7] Y. Kawano, Y. K.C. Kosaraju, J.M.A. Scherpen, Krasovskii and Shifted Passivity-Based Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 10, pp. 4926–4932, 2021.
- [8] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd Edition, Springer, 1995.
- [9] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.